Wahrscheinlichkeiten bei Entscheidungsfindungen

0.1 Einführung und Beispiel

Wahrscheinlichkeiten werden im allgemeinen so normiert, daß sie durch eine Zahl zwischen 0 und 1 beschrieben werden. Ein Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit von 1 ($\hat{=}$100%) tritt dabei mit absoluter Sicherheit auf, eines mit der Wahrscheinlichkeit 0 auf keinen Fall. Damit ließe sich die Wahrscheinlichkeit für ein "richtiges" Urteil bei einem Geschworenen, der zu 70% eine richtige Entscheidung κ fällt, mit

$$W(\kappa) = 0,7 \tag{1}$$

beschreiben.

Wahrscheinlichkeiten zweier (und mehrerer) Ereignisse, die voneinander unabhängig sind, multiplizieren sich miteinander. Da dies für Geschworene der Fall sein sollte, gilt z.B. bei der Erhöhung der Anzahl der Geschworenen auf 2 für die Wahrscheinlichkeit eines richtigen Urteils:

$$\begin{aligned} W(\kappa) &= 0,7^2 & (2)\\ &= 0,49 & (3) \end{aligned}$$

Sie ist also zunächst kleiner, da von den vier Möglichkeiten der Entscheidung nur eine (nämlich die, daß beide Geschworenen richtig urteilen) zum Erfolg führt.
Diese Unregelmäßigkeit verschwindet jedoch im allgemeinen Fall der Erhöhung der Anzahl der Geschworenen, wenn man voraussetzt, daß keine einstimmige Entscheidung, sondern lediglich eine Mehrheitsentscheidung für die Urteilsfindung notwendig ist. So hätte man bei drei Geschworenen a, b, c folgende Möglichkeiten der Entscheidungsverteilung bei den Individuen:

Nr.	a	b	c	Gemeinsames Urteil
1	f	f	f	f
2	f	f	r	f
3	f	r	f	f
4	r	f	f	f
5	f	r	r	r
6	r	f	r	r
7	r	r	f	r
8	r	r	r	r

Man erkennt, daß eine gleiche Anzahl von wahren und falschen Entscheidungsmöglichkeiten vorliegt. Wären also alle Einzelentscheidungen gleichwahrscheinlich, so erhielte man eine Gesamtwahrscheinlichkeit von (Anzahl der günstigen Fälle/Anzahl der möglichen Fälle =) 50%.

Berücksichtigt man aber zusätzlich die Wahrscheinlichkeit der Einzelentscheidung von 0,7 für eine richtige Entscheidung und 0,3 für eine falsche Entscheidung, so ergibt sich ein anderes Bild:

Nr.	a	b	c	Wahrscheinlichkeit
1	f	f	f	$0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 2,7\%$
2	f	f	r	$0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 6,3\%$
3	f	r	f	$0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 6,3\%$
4	r	f	f	$0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 6,3\%$
5	f	r	r	$0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 14,7\%$
6	r	f	r	$0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 14,7\%$
7	r	r	f	$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 14,7\%$
8	r	r	r	$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 34,3\%$

Summiert man die Wahrscheinlichkeiten auf, so ergibt sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit von $78,4\%$ für ein richtiges Urteil bzw. $21,6\%$ für eine falsche Entscheidung, was gegenüber der Entscheidung eines einzelnen Geschworenen bereits einen Zuwachs an Sicherheit bedeutet. Wichtig zu bemerken ist dabei vor allem, daß der Fall, in dem 2 Geschworene richtig und einer falsch votieren (unabhängig davon, welche), mit $3 \cdot 14,7\% = 44,1\%$ wahrscheinlicher ist als der, daß alle richtig stimmen, daß also einzelne Kombinationen durch mehrfaches Auftreten wahrscheinlicher sind als andere, die nur einfach möglich sind[1]. Die Menge aller Kombinationen zu einem solchen Fall nennt man die *Komposition*. Da es für das Ergebnis unerheblich ist, welcher Geschworene im einzelnen welches Urteil gefällt hat, berechnet man im allgemeinen direkt die Wahrscheinlichkeit einer Komposition.

0.2 Verallgemeinerung auf beliebige Anzahlen

Betrachtet man nun den Fall, daß n Geschworene eine Entscheidung fällen sollen - weiter unter der exemplarischen Voraussetzung, daß eine richtige Entscheidung mit 70%er Wahrscheinlichkeit gefällt wird. Dabei muß man wie oben alle günstigen Fälle sammeln und ihre Wahrscheinlichkeiten ausrechnen. Die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Komposition κ, die k richtige Entscheidungen beinhaltet, beträgt:

[1]Dieser Effekt ist dafür verantwortlich, daß bei einer hohen Anzahl von Geschworenen das Ergebnis mit sehr großer Wahrscheinlichkeit 70% : 30% ausfallen wird

$$W(\kappa) = \binom{n}{k} \cdot 0,7^k \cdot 0,3^{n-k} \tag{4}$$

Wobei $\binom{n}{k}$ den Binominalkoeffizienten darstellt, der sich folgendermaßen errechnen läßt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5}$$

Der Binomialkoeffizient ergibt sich dabei aus dem folgenden Gedankengang: Betrachtet man alle möglichen Fälle für ein Ereignis, so muß die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben. Also ist die Wahrscheinlichkeit κ_1, daß ein Geschworener ein falsches *oder* ein richtiges Urteil fällt, trivialerweise:

$$W(\kappa_1) = 0,7 + 0,3 = 1 \tag{6}$$

Wegen der Multiplikation unabhängiger Ereignisse (s.o.) gilt für n Geschworene:

$$(0,7 + 0,3)^n = 1^n = 1 \tag{7}$$

für den im obigen Beispiel verwendeten Fall $n = 3$ ergibt sich, wie bereits errechnet:

$$\begin{aligned}(0,7+0,3)^3 &= 0,7^3 + 3 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,7 \cdot 0,3^2 + 0,3^3 &(8)\\ &= 1 &(9)\end{aligned}$$

Die Vorfaktoren, die sich aus der Sortierung gleichnamiger Koeffizienten für eine Komposition ergeben (im Beispiel also 1, 3, 3 und 1), sind die oben genannten Binomialkoeffizienten[2].

Um nun die Wahrscheinlichkeit für ein richtiges Urteil von n Geschworenen zu errechnen, muß man wie im Beispiel die Fälle aufsummieren, in denen die Exponenten der Wahrscheinlichkeit für eine richtige Entscheidung größer sind als die für eine falsche Entscheidung. Also:

$$W(\kappa) = \sum_{k>\frac{n}{2}}^{n} \binom{n}{k} \cdot 0,7^k \cdot 0,3^{n-k} \tag{10}$$

[2]für den Fall $n = 2$ ergibt sich durch sie übrigens die bekannte binomische Formel.